Suites

M. CHATEAU David

17/06/2009

Résumé

Rappels sur les suites

Table des matières

1 Notations **3**

2 Suite arithmétique **3**

3 Suite géométrique **3**

4 Suite récurrente linéaire d'ordre 1 **3**
- 4.1 Solution homogène 3
- 4.2 Solution particulière 4
- 4.3 Solution générale 4
- 4.4 Principe de superposition 4
- 4.5 Suite arithmético-géométrique. (Term S) 4

5 Suite récurrente linéaire d'ordre 2 **4**
- 5.1 Solution homogène 5
  - 5.1.1 Delta positif 5
  - 5.1.2 Delta nul 5
  - 5.1.3 Delta négatif 5
- 5.2 Solution particulière 5
- 5.3 Solution générale 5
- 5.4 Principe de superposition 6

6 Suite de Cauchy **6**

7 Forces relatives des suites de référence **6**

8 Inégalités utiles **6**

1 Notations

Une suite (u_n), de 1er terme u_0, de n-ième terme u_n.
La somme de n premiers termes est notée S_n.

2 Suite arithmétique

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

3 Suite géométrique

$$u_{n+1} = u_n q$$

$$u_n = u_0 q^n$$

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

4 Suite récurrente linéaire d'ordre 1

Remarque : r^n est une exponentielle !

$$u_{n+1} = au_n + b(n) \quad (E)$$

$$u_{n+1} = au_n \quad (H)$$

$$x = a \quad (C)$$

4.1 Solution homogène

$$u_n = a^n u_0$$

4.2 Solution particulière

Si $b(n) = r^n P(n)$ avec $P(n)$ polynôme de degré n, on cherche une solution de la forme :

$$u_n = r^n Q(t)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n \text{ si } r \text{ pas solution de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+1 \text{ si } r \text{ solution de } (C)$$

On remplace et on identifie.

4.3 Solution générale

Comme pour les équations différentielles, la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière, et c'est à partir de cette solution générale que l'on détermine les constantes.

4.4 Principe de superposition

Comme pour les équations différentielles.

4.5 Suite arithmético-géométrique. (Term S)

$$u_{n+1} = au_n + b$$

On cherche le point fixe l qui vérifie

$$l = al + b$$

On pose

$$v_n = u_n - l$$

On montre que v_n est géométrique de raison a.

$\Rightarrow$Si plus complexe, on peut utiliser des suites adjacentes avec les termes pairs et impairs.

5 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c(n) \quad (E)$$

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (H)$$

$$x^2 = ax + b \quad (C)$$

5.1 Solution homogène

5.1.1 Delta positif

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles r_1 et r_2, et on a :

$$u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$$

5.1.2 Delta nul

Si $\Delta = 0$, il y a une racine réelle double r_0, et on a :

$$u_n = (K_1 + nK_2) r_0^n$$

5.1.3 Delta négatif

Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2, et on a :

$$u_n = K_1 Re(r_1^n) + K_2 Im(r_2^n) \quad \text{si } u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

$$u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n \quad \text{si } u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

d'où si $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$:

$$u_n = \rho^n \left(K_1 e^{in\theta} + K_2 e^{-in\theta}\right) \quad \text{si } u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

$$u_n = \rho^n \left(K_1 cos\left(n\theta\right) + K_2 sin\left(n\theta\right)\right) \quad \text{si } u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

5.2 Solution particulière

Si $c(n) = r^n P(n)$ avec $P(n)$ polynôme de degré n, on cherche une solution de la forme :

$$u_n = r^n Q(t)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n \text{ si } r \text{ pas solution de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+1 \text{ si } r \text{ solution de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+2 \text{ si } r \text{ solution de } (C)$$

On remplace et on identifie.

5.3 Solution générale

Comme pour les équations différentielles, la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière, et c'est à partir de cette solution générale que l'on détermine les constantes.

5.4 Principe de superposition

Comme pour les équations différentielles.

6 Suite de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \text{ tq } \forall p, q \geq N(\epsilon),\ |u_p - u_q| < \epsilon$$

Toute suite convergente est de Cauchy

7 Forces relatives des suites de référence

$$ln^{\beta} n \quad n^{\alpha} \quad a^n \quad n! \quad n^n$$

8 Inégalités utiles

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$(\text{car} \quad |a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{et} \quad -|a - b| \leq |a| - |b|)$$