La fonction exponentielle

Def : La fonction exponentielle, notée exp est l'unique solution de l'équation différentielle $f' = f$ avec $f(0) = 1$

DAC :

- L'existence est admise : notons exp une solution de $f' = f$ et $f(0) = 1$
  Montrons l'unicité d'une solution de l'équation différentielle $f' = f$ avec $f(0) = 1$
  Supposons qu'il existe 2 fonctions exp et g solutions de l'équadiff $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$
  On va montrer que $\frac{g}{\exp}(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Montrons que $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Considérons la fonction $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$
  φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions dérivables ($\exp(x)$ et $\exp(-x)$),
  exp étant dérivable car solution de l'équadiff $\exp' = \exp$
  $\varphi'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-1 \times \exp'(-x))$
  $= \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x)$
  Donc $\varphi'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$
  Donc $\varphi(x) = \varphi(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\exp(0) = 1$
  $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  En particulier $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Considérons la fonction $\Psi(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)}$
  Ψ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\exp(x) \neq 0$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$
  et $g(x)$ définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ car solution de $g' = g$
  $\Psi(x) = \frac{g' \exp - g \exp'}{\exp^2}(x) = \frac{g \exp - g \exp}{\exp^2}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Donc $\Psi(x)$ est constante : $\Psi(x) = \Psi(0) = \frac{g(0)}{\exp(0)} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Donc $\frac{g}{\exp}(x) = 1$ donc $g(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  L'unicité est démontrée ! (CQFD)

Caractérisation : $\boxed{\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$ // Il n'existe qu'une seule fonction définie dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant ces 2 conditions : c'est la fonction exponentielle

Premières propriétés : $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

DAC :

- Supposons qu'il existe x_0 tel que $\exp(x_0) < 0$
  On sait que $\exp(0) = 1 > 0$ exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x_0;0]$
  Sur $[x_0;0]$, exp est continue et $\exp(x_0) < 0$; $\exp(0) > 0$
  Donc par le TVI : il existe $\alpha \in]x_0;0[$ tel que $\exp(\alpha) = 0$
  Or $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Donc l'hypothèse qu'il existe x_0 tel que $\exp(x_0) < 0$ est fausse :
  Donc $\exp(x) \geq 0$ pour tout x. Or $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
  Donc $\exp(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$
- exp est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$
  $\exp' = \exp$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x
  Donc $\exp'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  Donc exp est stt $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

Le nombre e :

TH : $\boxed{e = \exp(1)}$ $\quad e \approx 2{,}718\ldots$ est irrationnel

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Propriétés algébriques :

TH : On a pour tout a et x réels :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$$

$$\exp(x-a) = \frac{\exp(x)}{\exp(a)} \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

$$\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

DAC :

- On a vu que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Montrons que $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

  Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a) \times \exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

  $\exp(a+x)$ en tant que composée de fonctions dérivables ($a+x$ et exp) et $\exp(a) \times \exp(x)$

  $$g'(x) = \frac{1 \times \exp'(a+x) \times \exp(a)\exp(x) - \exp(a+x) \times \exp(a)\exp'(x)}{(\exp(a)\exp(x))^2}$$

  $$= \frac{\exp(a+x)\exp(a)\exp(x) - \exp(a+x)\exp(a)\exp(x)}{(\exp(a)\exp(x))^2} = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

  Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

  $g(x) = g(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a)\exp(0)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$ pour tout x.

  Donc $\exp(a+x) = \exp(a)\exp(x)$
- $\exp(x-a) = \exp(x) \times \exp(-a) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(a)}$
- $\exp(nx) = \exp(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\exp(x) \times \ldots \times \exp(x)}_{n \text{ fois}} = (\exp(x))^n$

  $n \in \mathbb{N}$ $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n}$ donc $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
- $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \left(\exp\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(\dfrac{x}{n} \times n\right) = \exp(x)$ donc $\exp\left(\dfrac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)}$

Def : On note $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

TH' : $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \qquad e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$e^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{e^a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Etude de exp :

TH : On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Corollaire :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc la RG de exp admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (y'y)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc (x'x) est asymptote horizontale à la RG de exp au voisinage de $-\infty$

DAC :

I) On va montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Montrons que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Notons $\varphi(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$

φ est dérivable car somme de fonctions dérivables (e^x et $-x-1$)

et $\varphi'(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Or $e^x \geq 1$ d'où $e^x - 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$\varphi'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

d'où $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ pour tout $x \geq 0$

$\varphi(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

donc $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$

On a montré que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ par théorème de comparaison.

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

III) On a démontré que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

donc $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2} + 1 \geq \frac{x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

d'où $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

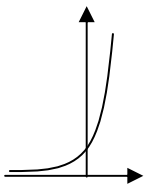
donc $e^x > \frac{x^2}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

d'où $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

TH : exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

R.G. :



Compléments :

Fontion e^u :

TH : Soit u définie sur un intervalle I

Si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I et :

$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$

TP6 : Méthode d'Euler

Résolution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$

Par approximation affine : $f(a+h) \sim hf'(a) + f(a)$

$$f(0+h) \sim hf'(0) + f(0) = h + 1$$

$$h(h+h) = f(2h) \sim hf'(h) + f(h) = f(h)(h+1) = (h+1)^2$$

Récurrence : P → $f(nh) = (1+h)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

I : pour $n = 1$ $\quad f(h) \sim 1 + h \quad \Rightarrow P_0$ vraie

H : supposons $f(nh) \sim (1+h)^n$

soit $f((n+1)h) = f(nh+h) \sim hf'(nh) + f(nh)$

$$\sim f(nh)(h+1)$$

$$\sim (1+h)^n(h+1)$$

$$\sim (1+h)^{n+1} \qquad \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie}$$

C : Par principe de récurrence, P est vraie à tous les rangs

Plus h est petit (= plus le pas est petit), meilleur est la précision.

Ex : $h = 0{,}1 \Rightarrow f(2) = (1+h)^n = (1{,}1)^{20}$

Croissance comparée :

TH : On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

DAC :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On a pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq x + 1$ donc $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1 \geq \frac{x}{n+1} \geq 0$

la fonction X^{n+1} est stt ↗ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ d'où $e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ donc $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ car $(n+1)^{n+1} > 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim_{x \to +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$ $\begin{cases} = 0^+ \text{si } n \text{ pair} \\ = 0^- \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ car $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$

Limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$: TH : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

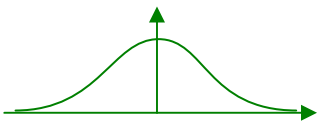
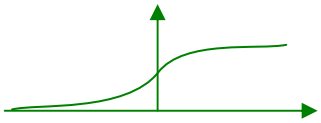
Approximation affine en 0 : TH : approximation affine au voisinage de 0.

on a $e^x \sim 1 + x$ lorsque $x \sim 0$

TP 7 : Etude de fonctions contenant exp

- $f(x) = e^{\frac{-x^x}{2}} \Rightarrow$ Courbe de Gauss (Probas) ; Max en 0 car $f'(0) = 0$

  Aire sous la courbe = $\sqrt{2\pi}$; « en cloche »



- $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$