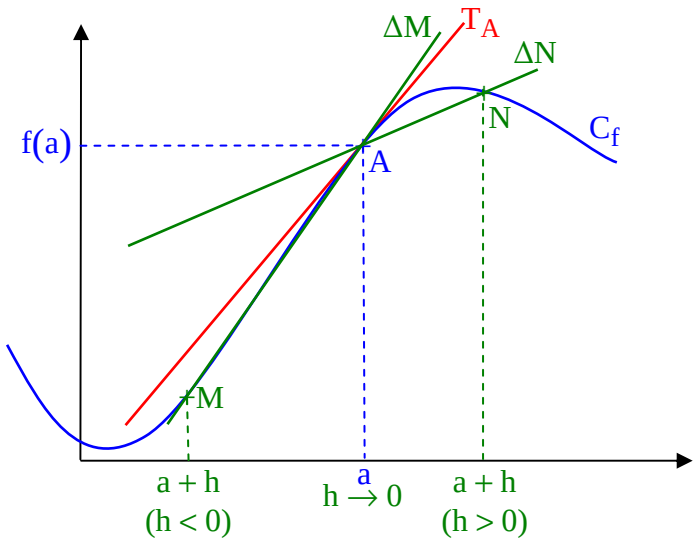
Dérivation

Tangente et rappels :



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(= lim du taux de variation)

Def 1 : Soit f définie sur I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a ssi C_f admet une tangente T_A en A (a; f(a)).
Le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tengente.

Def 2 : f définie au voisinage de a est dérivable en a ssi $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est réelle.

On a alors $\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

Def 3 : f est dérivable en a ssi il existe une fonction $\varepsilon(h)$ et un réel $f'(a)$ tels que :
$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)}$ pour tout h voisin de 0 avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Def 3' : f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon(x)$ et $f'(a)$ tels que :
$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)}$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

TH : Toute fonction dérivable en a est continue en a. ⚠ Réciproque fausse.

DAC : Soit f définie au voisinage de a, dérivable en a.
Alors il existe ε tel que : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

On a $\begin{cases} \lim_{x \to a} (x-a)\varepsilon(x) = 0 \\ \lim_{x \to a} (x-a)f'(a) = 0 \end{cases}$ donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Donc f est continue en a.

$\boxed{f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{dy}{dx}(a)}$: notation différentielle

Equation de T_A :

TH : Soit f dérivable en a et T_A la tangente en A (a; f(a)) à C_f.
$\boxed{T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Approximation affine :

Prop : Soit f dérivable en a. Alors lorsque $x \sim a$ on a :

$$\boxed{f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Prop : Soit f dérivable en a. Alors lorsque $h \sim 0$ on a :

$$\boxed{f(a+h) \sim hf'(a) + f(a)}$$

Sur I : Def : Soit f définie sur I. Si f est dérivable pour tout x de I alors on peut définir la fonction f′ dérivée de f sur I par $f' : I \to \mathbb{R}$ $(x \to f'(x))$

TH : Toute fonction dérivable sur I est continue sur I

Dérivées de fonctions usuelles et opérations :

Fonction	Fonction dérivée
k, k cste	0
x^n, $n \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$; sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	nx^{n-1} sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$; sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
sin x	cos x
cos x	− sin x
tan x sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
u + v	u′ + v′
au, a cste	au′
uv	u′v + uv′
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$
$v \circ u(x_0)$	$v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$

TH : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (pour DEM → taux de v°)

TH : Soit u dérivable en x_0 et v dérivable en $u(x_0)$
Alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et :
$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$

DAC : Soit u dérivable en x_0 et v dérivable en $u(x_0)$

On va chercher le nombre dérivé $(v \circ u)'(x_0)$.

Le taux de variation de $v \circ u$ en x_0 est :

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) \text{ car u est C° en } x_0 \text{ car dérivable.} \\ \lim\limits_{X \to u(x_0)} \frac{v(X) - v(u(x_0))}{X - u(x_0)} = v'(u(x_0)) \text{ car v est dérivable en } u(x_0). \end{cases}$$

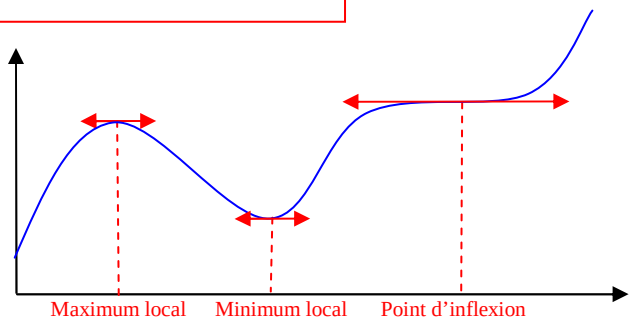
Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$

TH :
- Soit $n \in \mathbb{Z}$ et u définie, dérivable sur I telle que : $u \neq 0$ sur I, alors u^n est dérivable sur I et :
  $$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$
- Soit u définie, dérivable sur I telle que $u > 0$ sur I
  Alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :
  $$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Dérivée et variation :

TH : Soit f dérivable sur I
- Si $f'(x) \geq > 0$ pour tout x de I
  Alors f est stt croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq < 0$ pour tout x de I
  Alors f est stt décroissante sur I.
- Si f'(x)=0 pour tout x de I
  Alors f est constante sur I.

Dérivée et extrema :



TH : Soit f définie dérivable sur un intervalle I ouvert
- Si $f(x_0)$ est extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$
- Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = x_0$ alors $f(x_0)$ est extremum local

Approximation affine au voisinage de 0 :

TH : Lorsque $x \sim 0$ on a :
$$(1+x)^n \sim 1 + nx$$
$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$$
$$\sin x \sim x$$
$$\cos x \sim 1$$

TP5 : Etude de fonctions

Etudier une fonction, c'est :
1) D_f, parité, périodicité
   → peut-être réduire l'ensemble d'étude.
2) limites aux bornes de D_f, asymptotes
3) Dérivée, variation, extrema, R.G.
4) Killing questions (Bijection…)

UTILE :

Dérivable ?

→ Taux de variation réel ?

(lim τ pour $x \to a = \mathbb{R}$)

Continue ?

→Même limite par valeur > et < ?

$x \to a$: $\lim f(x) = f(a)$