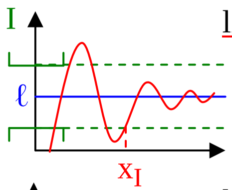
Suites numériques

Limites : f une fonction

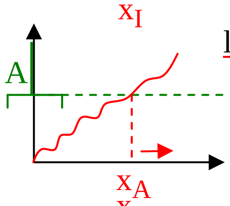
En $+\infty$ ou $-\infty$: $D_f = [M;+\infty[$ ou $]-\infty;M]$



limite finie :

Def : On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty\,-\infty} f(x) = \ell$ si pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ,

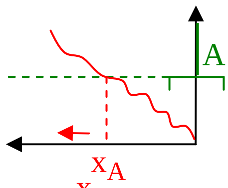
il existe $x_I \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \geq\ \leq x_I$

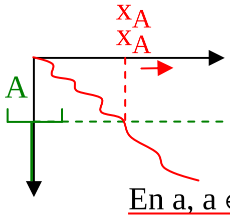


limite infinie :

Def : On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty\,-\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout $A > 0$,

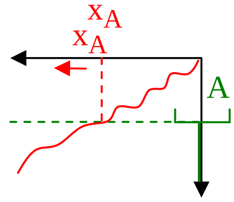
il existe x_A tel que $f(x) \in [A;+\infty[$ pour tout $x >\ < x_A$



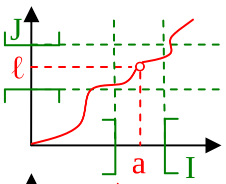


Def : On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty\,-\infty} f(x) = -\infty$ si pour tout $A < 0$,

il existe x_A tel que $f(x) \in]-\infty;A]$ pour tout $x >\ < x_A$



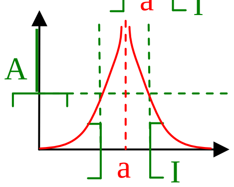
En a, $a \in \mathbb{R}$: $D_f = I \backslash \{a\}$



limite finie :

Def : On dit que $\lim\limits_{x \to a\,(<)(>)} f(x) = \ell$ si pour tout intervalle J ouvert contenant ℓ,

il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$.



limite infinie :

Def : On dit que $\lim\limits_{x \to a\,(<)(>)} f(x) = +\infty\ -\infty$ si pour tout $A >\ < 0$,

il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que $f(x) \in]A\ -\infty;+\infty A[$ pour tout $x \in I$.

Asymptotes :

Def : Si $\lim\limits_{x \to +\infty\,-\infty} f(x) = \ell$ alors la droite $\Delta : y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à C_f.

Def : Si $\lim\limits_{x \to a\,(<)(>)} f(x) = +\infty$ alors la droite $\Delta : x = a$ est appelé asymptote verticale à C_f.

Def : Si $\lim\limits_{x \to +-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f au voisinnage de $+-\infty$

limites classiques :

TH : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty\ -\infty$ si n pair impaire $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+ 0^-$ si n pair impair

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +-\infty$ si n pair impair

Opérations sur les limites :

TH : Voir CH1

TH : Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- la limite d'un polynôme est la limite de son monôme de plus haut degré.
- la limite d'une fonction rationnelle est la limite du rapport des monômes de plus haut degré.

limite d'une fonction composée :

TH : Soit a,b et ℓ trois réels ou $+\infty$ et $-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$

Théorème de comparaison :

TH : Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$

- Si pour x voisin de a, on a $u(x) \le f(x) \le v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell$ $\quad (\ell \in \mathbb{R})$

  alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (TH des gendarmes)
- Si pour x voisin de a, on a $u(x) \le \ \ge \ f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty \ -\infty$

  alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ -\infty$

Fonctions et suites :

TH : Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n = f(n)$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers ℓ
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$

DAC : Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n = f(n)$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ,

  il existe x_I tel que $f(x) \in I$ pour $x > x_I$ donc pour tout $n \ge E(x_I) + 1$; $u_n = f(n) \in I$

  Donc (u_n) converge vers ℓ.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors pour tout intervalle $A > 0$,

  il existe x_A tel que $f(x) \in]A;+\infty[$ pour $x > x_A$ donc pour tout $n \ge E(x_A) + 1$; $u_n = f(n) \in]A;+\infty[$

  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$

TH : Soit f une fonction définie sur I, (u_n) une suite à valeur dans I et $v_n = f(u_n)$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \ +\infty \ -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to a\ +\infty\ -\infty} f(x) = \ell \ +\infty \ -\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \ +\infty \ -\infty$

Continuité :

Def 1 : Intuitivement, une fonction est continue (C^0) sur un intervalle si on peut tracer sa RG sans lever le stylo.

Def 2 ; Soit f définir sur I et $a \in I$

- f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (par sup et inf)
- f est continue sur I si f est continue en a pour tout $a \in I$.

Conséquences :
- La somme et le produit de deux fonctions continues sur un intervalle est continue.
- L'inverse d'une fonction continue est continue si la fonction ne s'annule pas.
- Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$.
- Les fractions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Théorème des valeurs intermédiaires :

TH : Soit f continue sur un intervalle $[a;b]$
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
Il existe $C \in [a;b]$ tel que $f(C) = k$.

DAC :

Dans le cas où $f(a) < f(b)$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a $f(a_0) \le k \le f(b_0)$

1) Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le k$ alors on pose $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$

Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > k$ alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

2) Si $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \le k$ alors on pose $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$

Si $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > k$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

… et ainsi de suite

On construit ainsi 2 suites (a_n) et (b_n) avec (a_n) $\nearrow$ et (b_n) $\searrow$,

et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ donc $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$ $\Rightarrow$ (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

(a_n) et (b_n) étant adjacentes, elles convergent vers la même limite C.

(a_n) est $\nearrow$ donc $a_n \ge a_0$ pour tout n ; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \ge a_0$ donc $C \ge a_0$

(b_n) est $\searrow$ donc $b_n \le b_0$ pour tout n ; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \le b_0$ donc $C \le b_0$

Donc $C \in [a_0;b_0]$

(a_n) et (b_n) sont donc convergentes vers $C \in [a_0;b_0] = [a;b]$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = C = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

f est continue sur $[a;b]$ donc continue en C donc $\lim\limits_{x \to C} f(x) = f(C)$

On a donc : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = C \\ \lim\limits_{x \to C} f(x) = f(C) \text{(par continuité)} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(C)$

$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = C \\ \lim\limits_{x \to C} f(x) = f(C) \text{(par continuité)} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n) = f(C)$

Par construction $f(a_n) \le k \le f(b_n)$ pour tout n

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) \le k \le \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n)$ d'où $f(c) \le k \le f(c)$ Donc $f(c) = k$

Bijection :

TH : Soit f continue, stt monotone sur $[a;b]$
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
l' équation $f(x)=k$ a une unique solution dans $[a;b]$.
$\Leftrightarrow$
Toute fonction stt monotone, continue sur un intervalle $[a;b]$, est bijective sur $[a;b]$.

TP 4 : Résolution d'équations par le théorème de la bijection

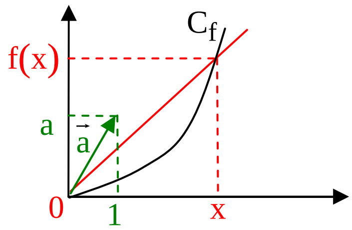
⚠ à la rédaction

1) Continuité (polynôme, somme de fct)
2) Monotonie (somme de fct ou tableau de signes)
3) Bijective de I sur f(I)=J (calcul limites de f(I))
4) Si $x \in J \Rightarrow$ 1 solution ; si non 0.
5) Résultat à la calculette, encadrement OU valeur approchée.

Complément sur les asymptotes :

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\dfrac{f(x)}{x}$ est le coefficient directeur de OM.



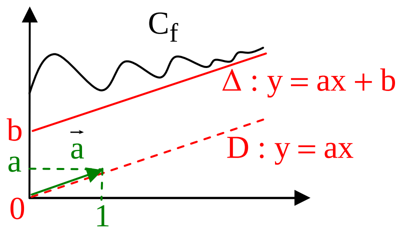
1) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a,\ a \in \mathbb{R}^*$ alors OM admet une direction limite donnée par le vecteur $\vec{u}\ (1\ ;\ a)$.

On étudie $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax\right)$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax\right) = b \in \mathbb{R}$

  Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$

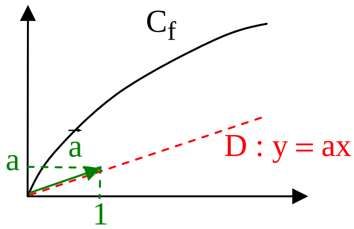
  Donc $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f.



- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax\right) = +\infty$

  Alors C_f admet une branche parabolique

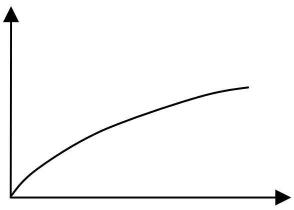
  de direction $D : y = ax$



2) **Def :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors $\vec{u}\ (1\ ;\ 0)$

et C_f admet une branche parabolique de direction

l'axe des abscisses (x'x) (ex : $\sqrt{x}$)



3) **Def :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors $\vec{u}\ (0\ ;\ 1)$

et C_f admet une branche parabolique de direction

l'axe des ordonnées (y'y) (ex : x^2)