Intégration

M. CHATEAU David

12/06/2009

Résumé

Comment intégrer facilement...

Table des matières

1 Primitives usuelles **3**
1.1 Fonctions usuelles 3
1.2 Fractions rationnelles 3
1.3 Fonctions racines 3
1.4 Fonctions trigonométriques 4

2 Méthodes d'intégration **5**
2.1 Variables indépendantes 5
2.2 Variables séparables 5
2.3 Intégration par parties 5
2.4 Décomposition en éléments simples 5
2.5 Linéarisation 5
2.6 Changement de variable 6
2.6.1 Fraction rationnelle en sin/cos 6
2.6.2 Fraction rationnelle en sh/ch 6
2.6.3 Intégrale abélienne 6

1 Primitives usuelles

1.1 Fonctions usuelles

f	F
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$
$ln(x)$	$xln(x) - x$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
a^x	$\frac{a^x}{ln(a)}$

1.2 Fractions rationnelles

f	F
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}Arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{a}Argth(\frac{x}{a})$
$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$	$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$
$J_n = \int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$	$2nJ_{n+1} = \frac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)J_n$

1.3 Fonctions racines

f	F
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$Arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\frac{1}{(a+x^2)^{3/2}}$	$\frac{x}{a\sqrt{a+x^2}}$
$\frac{1}{(a-x^2)^{3/2}}$	$\frac{x}{a\sqrt{a-x^2}}$

1.4 Fonctions trigonométriques

f	F	/	f	F
$cos(x)$	$sin(x)$	/	$ch(x)$	$sh(x)$
$sin(x)$	$-cos(x)$	/	$sh(x)$	$ch(x)$
$tan(x)$	$-ln\|cos(x)\|$	/	$th(x)$	$ln\|ch(x)\|$
$cotan(x)$	$ln\|sin(x)\|$	/	$coth(x)$	$ln\|sh(x)\|$
$sin(x)cos(x)$	$\frac{1}{2}sin^2(x)$	/	$sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{2}sh^2(x)$
$\frac{1}{sin(x)}$	$ln\|tan(\frac{x}{2})\|$	/	$\frac{1}{sh(x)}$	$ln\|th(\frac{x}{2})\|$
$\frac{1}{cos(x)}$	$ln\|tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\|$	/	$\frac{1}{ch(x)}$	$2Arctan(e^x)$
$\frac{1}{sin^2(x)}$	$-cotan(x)$	/	$\frac{1}{sh^2(x)}$	$-coth(x)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x)$	/	$\frac{1}{ch^2(x)}$	$th(x)$
$\frac{1}{sin(x)cos(x)}$	$ln\|tan(x)\|$	/	$\frac{1}{sh(x)ch(x)}$	$ln\|th(x)\|$
$tan^2(x)$	$tan(x)-x$	/	$th^2(x)$	$x-th(x)$

2 Méthodes d'intégration

2.1 Variables indépendantes

$$\int f(\alpha)g(\beta)\,d\alpha\,d\beta = \int f(\alpha)\,d\alpha * \int g(\beta)\,d\beta$$

2.2 Variables séparables

$$\int f(\alpha)\,d\alpha = \int g(\beta)\,d\beta \Rightarrow F(\alpha) = F(\beta)$$

2.3 Intégration par parties

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

On utilise la règle LPET : On dérive en priorité les logarithmes, puis les polynômes, puis les exponentielles, puis les fonctions trigonométriques.

2.4 Décomposition en éléments simples

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{\alpha}\sum_{k}\frac{\alpha_k}{(x-\alpha)^k} + \sum_{\beta,\gamma}\sum_{k}\frac{\beta_k x + \gamma_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

Les termes des dénominateurs sont les facteurs de Q.

Penser à la parité, imparités, conjugués, symétries...

On fait ensuite apparaître la primitive de ln ou de $Arctan$ en passant le dénominateur à la forme canonique si besoin.

Parfois l'astuce de calcul « $+1-1$ » s'avère utile.

Si on décompose dans $\mathbb{C}$, pour revenir dans $\mathbb{R}$ on utilise :

$$(X-z)(X-\bar{z}) = X^2 + 2\,Re(z) + \mid z \mid^2$$

2.5 Linéarisation

Utile pour les polynômes en sin/cos. On transforme d'abord le tout en une somme de puissances de sin ou cos, puis on linéarise chaque terme :

- On écrit la formule d'Euler

$$cos^n(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n \qquad sin^n(x) = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^n$$

- On développe avec le binôme de Newton dont les coefficients sont donnés par le triangle de Pascal

$$(a+b)^n = C_n^k a^k b^{n-k} \qquad C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} \quad C_0^0 = 1$$

- On rassemble pour avoir une somme de sin(nx) ou cos(nx)

2.6 Changement de variable

$$\int_a^b \varphi' * (f \circ \varphi)(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$$

On pose $t = f(x)$, on calcul dt, on en déduit dx. On calcule les nouvelles bornes et on remplace. Le but est de se ramener à une fraction rationnelle de polynôme.

Il faut le faire apparaître même s'il est simple.

2.6.1 Fraction rationnelle en sin/cos

Soit $w(x) = f(x)dx$,
- Si $w(x) = w(-x)$, on pose $t = cos(x)$
- Si $w(x) = w(\pi - x)$, on pose $t = sin(x)$
- Si $w(x) = w(\pi + x)$, on pose $t = tan(x)$
- Sinon, on pose $t = tan(\frac{x}{2})$, on a alors :

$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

2.6.2 Fraction rationnelle en sh/ch

On pose $t = e^x$, on a $dt = \frac{du}{u}$ ...

2.6.3 Intégrale abélienne

R est une fraction rationnelle.
- si on a : $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$, on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- si on a : $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, après avoir mis sous forme canonique, on pose :
  - $t = sin(x)$ (ou $t = cos(x)$) si on a du $\sqrt{1 - u^2}$
  - $t = sh(x)$ si on a du $\sqrt{u^2 + 1}$
  - $t = ch(x)$ si on a du $\sqrt{u^2 - 1}$