# Équations différentielles

M. CHATEAU David

09/06/2009

**Résumé**

Méthodes pratiques de résolution des équations différentielles.

# Table des matières

**1 Équations différentielles linéaires du premier ordre** **3**
1.1 Solution homogène . . . . . 3
1.1.1 En physique . . . . . 3
1.2 Solution particulière . . . . . 3
1.2.1 Méthode de la variation de la constante . . . . . 3
1.2.2 Second membre particulier . . . . . 3
1.2.3 Principe de superposition . . . . . 4
1.3 Solution générale . . . . . 4

**2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants** **5**
2.1 Solution homogène . . . . . 5
2.1.1 Delta positif . . . . . 5
2.1.2 Delta positif en physique . . . . . 5
2.1.3 Delta nul . . . . . 5
2.1.4 Delta nul en physique . . . . . 6
2.1.5 Delta négatif . . . . . 6
2.1.6 Delta négatif en physique . . . . . 6
2.2 Solution particulière . . . . . 6
2.2.1 Second membre particulier . . . . . 6
2.2.2 Principe de superposition . . . . . 7
2.3 Solution générale . . . . . 7
2.4 Remarque sur la stabilité . . . . . 7
2.5 Remarque sur les pôles . . . . . 7

**3 Séries** **7**

# 1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (E)$$

$$y' + a(t)y = 0 \quad (H)$$

$$x + a(t) = 0 \quad (C)$$

## 1.1 Solution homogène

$$y_H(t) = ke^{-A(t)}$$

avec $k$ constante réelle et $A(t)$ primitive de $a(t)$.

### 1.1.1 En physique

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = Cste$$

$$x(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + Cste$$

## 1.2 Solution particulière

### 1.2.1 Méthode de la variation de la constante

On pose $k = k(t)$, on remplace dans l'équation pour obtenir une expression de $k'(t)$. On trouve alors une primitive $k(t)$ que l'on remplace dans l'expression de la solution homogène pour obtenir une solution particulière.

$$y_P(t) = k(t)e^{-A(t)}$$

### 1.2.2 Second membre particulier

Si $b(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P(t)$ polynôme de degré $n$, on cherche une solution de la forme :

$$y_P(t) = Q(t)e^{mt}$$

$$Q(t) \text{ de degré } n \text{ si } m \text{ pas solution de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+1 \text{ si } m \text{ solution de } (C)$$

On remplace et on identifie.

### 1.2.3 Principe de superposition

Si $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ on pose

$$y' + a(t)y = b_1(t) \quad (E_1)$$

$$y' + a(t)y = b_2(t) \quad (E_2)$$

Si on a $y_1(t)$ solution de $(E_1)$ et $y_2(t)$ solution de $(E_2)$, on a :

$$y_P(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

## 1.3 Solution générale

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Si on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$, la solution est unique.

Attention, si le coefficient devant $y'$ peut s'annuler, il y a une solution entre chaque valeur d'annulation.

# 2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = c(t) \quad (E)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (H)$$

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (C)$$

## 2.1 Solution homogène

### 2.1.1 Delta positif

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines $r_1$ et $r_2$. On a :

$$y_H(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

avec $K_1$ et $K_2$ constantes réelles.

### 2.1.2 Delta positif en physique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$\Delta' > 0$ correspond au *régime apériodique, amortissement fort.*
On pose $\mu^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$. On a $r_1 = -\lambda - \mu$ et $r_2 = -\lambda + \mu$ donc :

$$x(t) = Ke^{-\lambda t} exp^{(\mu t + \varphi)} \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}[K_1 exp^{(\mu t)} + K_2 exp^{-(\mu t)}] \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = Ke^{-\lambda t} ch(\mu t + \varphi) \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}[K_1 ch(\mu t) + K_2 sh(\mu t)] \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

### 2.1.3 Delta nul

Si $\Delta = 0$, il y a une racine $r_0$. On a :

$$y_H(t) = K_1 e^{r_0 t} + K_2 t e^{r_0 t}$$

avec $K_1$ et $K_2$ constantes réelles.

### 2.1.4 Delta nul en physique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$\Delta' = 0$ correspond au *régime critique, amortissement critique.*
On a $r_0 = -\lambda = -\omega_0$ donc :

$$x(t) = (K_1 t + K_2) exp^{(-\lambda t)} \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}(K_1 t + K_2) \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

### 2.1.5 Delta négatif

Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées $r_1$ et $r_2$. On a :

$$y_H(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

avec $K_1$ et $K_2$ constantes réelles.

### 2.1.6 Delta négatif en physique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$\Delta' < 0$ correspond au *régime pseudo-périodique, amortissement faible.*
On pose $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$. On a $r_1 = -\lambda + j\omega_1$ et $r_2 = -\lambda - j\omega_1$ donc :

$$x(t) = Ke^{-\lambda t} exp^{i(\omega_1 t + \varphi)} \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}[K_1 exp^{i(\omega_1 t)} + K_2 exp^{-i(\omega_1 t)}] \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = Ke^{-\lambda t} cos(\omega_1 t + \varphi) \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}[K_1 cos(\omega_1 t) + K_2 sin(\omega_1 t)] \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

## 2.2 Solution particulière

### 2.2.1 Second membre particulier

Si $c(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P(t)$ polynôme de degré $n$, on cherche une solution de la forme :

$$y_P(t) = Q(t)e^{mt}$$

$$Q(t) \text{ de degré } n \text{ si } m \text{ pas solution de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+1 \text{si } m \text{ solution simple de } (C)$$

$$Q(t) \text{ de degré } n+2 \text{ si } m \text{ solution double de } (C)$$

On remplace et on identifie.
Si *cos* ou *sin*, se ramener à *exp* et prendre la partie réelle ou imaginaire.

### 2.2.2 Principe de superposition

Si $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$ on pose

$$y'' + ay' + by = c_1(t) \quad (E_1)$$

$$y'' + ay' + by = c_2(t) \quad (E_2)$$

Si on a $y_1(t)$ solution de $(E_1)$ et $y_2(t)$ solution de $(E_2)$, on a :

$$y_P(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

## 2.3 Solution générale

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Si on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$, la solution est unique.

## 2.4 Remarque sur la stabilité

Pour que le système ne diverge pas, il faut que les signes des coefficients $a$, $b$, $c$ de l'équation différentielle soient les mêmes.

## 2.5 Remarque sur les pôles

Le premier coefficient ne doit pas s'annuler. Sinon il y a une solution distincte entre chaque valeur d'annulation, appellées pôles.

# 3 Séries

On pose $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, d'où $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$ et $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$.
On remplace dans l'équation différentielle.
On fait partir tous les indices de 0 par changement d'indice.
Puis décompose en d'éventuels premiers termes constant ou en $x$ et en une somme infinie.
Les coefficients doivent êtres nuls pour chaque puissance de $x$.
On détermine le terme $a_n$ par récurrence.
Enfin on retrouve des fonctions connues.