Courbes paramétrées

M. CHATEAU David

14/07/2009

Résumé

Rappels sur les courbes paramétrées

Table des matières

1 Méthode d'étude **3**
1.1 Domaine de définition 3
1.2 Restreindre l'ensemble d'étude 3
1.3 Dérivées, Sens de variation 3
1.4 Limites aux bornes 3
1.5 Points stationnaires 3
1.6 Branches infinies, asymptotes 6
1.7 Intersections avec les axes 6
1.8 Points multiples 6
1.9 Tracé 6

2 Équation de la tangente **7**

3 Continuité, Dérivabilité **7**

1 Méthode d'étude

1.1 Domaine de définition

- Les dénominateurs ne s'annulent pas.
- Les termes sous les racines sont positifs.
- Les termes dans les logarithmes sont strictement positifs.

1.2 Restreindre l'ensemble d'étude

- Parité
- Imparité
- Périodicité
- Symétries

Penser à le faire même si la variable est un angle, et attention si repère tournant.

1.3 Dérivées, Sens de variation

- Faire un tableau de variation avec les différentes variables.
- Si plusieurs variables, calculer aussi les dérivées de chaque variable par rapport aux autres (donne le coefficient directeur de la tangente).
- Si courbe en polaire, étudier aussi le signe de $r(\theta)$.

Dérivée positive/négative implique fonction croissante/décroissante, bien sûr...

1.4 Limites aux bornes

Étudier les limites aux *bornes finies et infinies* de l'ensemble de définition.
Pour calculer une limite on peut :

- Factoriser par les termes de plus hauts degrés.
- Multiplier par la quantité conjuguée.
- Utiliser un DL.
- Faire apparaître la limite d'un taux de variation dont la dérivée est connue.
- Pour une fraction rationnelle, en l'infinie, on prend la limite des monômes de plus haut degré.

1.5 Points stationnaires

Un point est *stationnaire* si $\overrightarrow{f'}(t_0) = \overrightarrow{0}$. Sinon il est *régulier*.
En polaire, le seul point stationnaire possible est l'origine.

On écrit $\overrightarrow{f}(t_0 + h) = \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{V_p}h^p + \ldots + \overrightarrow{V_q}h^q + \overrightarrow{o(h^q)}$, avec $\overrightarrow{V_p}$ et $\overrightarrow{V_q}$ non colinéaires, et (p, q) les plus petits possible.

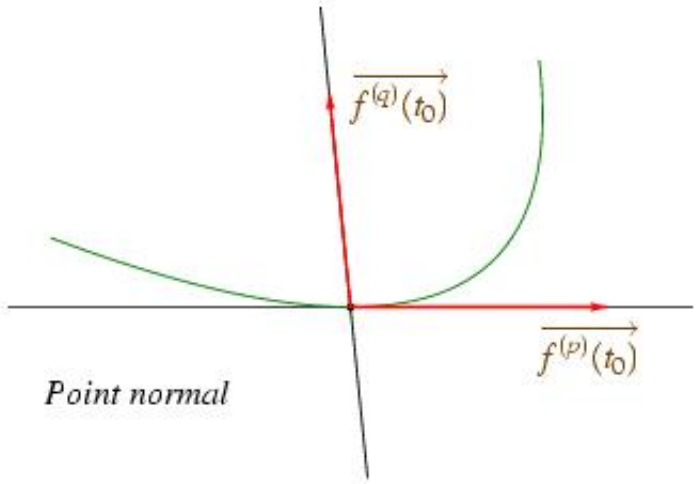
$\overrightarrow{V_p}$ donne la tangente.

$\overrightarrow{V_q}$ permet d'avoir une base du plan est de déterminer la position par rapport à la tangente.

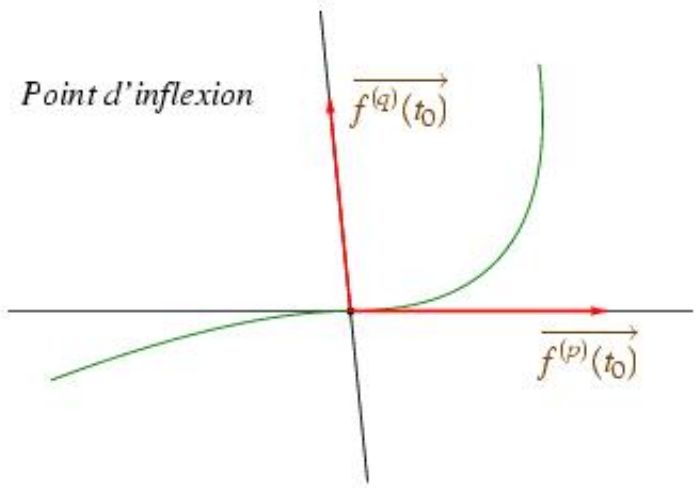
$$\overrightarrow{dM} \sim h^p\overrightarrow{V_p} + h^q\overrightarrow{V_q}$$

Pour $h > 0$, on a :

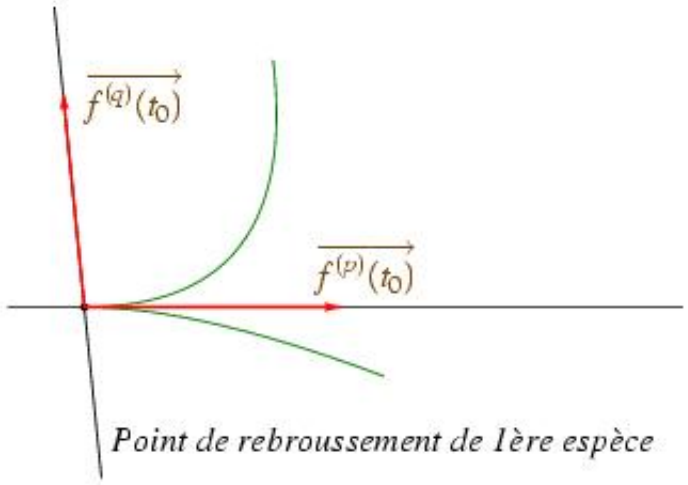
- *p impair* et *q pair* $\Rightarrow$ *point ordinaire.*



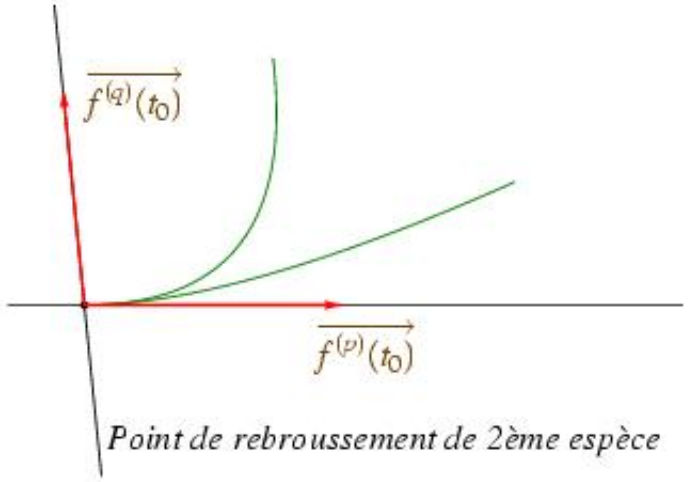
- *p impair* et *q impair* $\Rightarrow$ *point d'inflexion.*



– *p pair* et *q impair* ⇒ *point de rebroussement de 1ère espèce.*



– *p pair* et *q pair* ⇒ *point de rebroussement de 2nd espèce.*



1.6 Branches infinies, asymptotes

Il y a une *branche infinie* en t_0 si au moins une des variables tends vers l'infini en t_0.

- Courbe en (x, y)
  - Si $x \to \infty$ et $y \to y_0$, asymptote horizontale $y = y_0$.
  - Si $x \to x_0$ et $y \to \infty$, asymptote verticale $x = x_0$.
  - Si $x \to \infty$ et $y \to \infty$, on regarde $\frac{y(t)}{x(t)}$.
    - Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to \infty$, branche parabolique de direction (Oy).
    - Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to 0$, branche parabolique de direction (Ox).
    - Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to a$, on regarde $lim\,[y(t) - ax(t)]$.
      - Si $lim\,[y(t) - ax(t)] = \infty$, branche parabolique de direction $y = ax$.
      - Si $lim\,[y(t) - ax(t)] = b$, asymptote $y = ax + b$.

- Courbe en (r, θ)
  - Si on a θ_0 tel que $lim_{\theta \to \theta_0} r(\theta) = \infty$.
    On a alors dans $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$
    $X(\theta) = r(\theta)\, cos(\theta - \theta_0)$, $Y(\theta) = r(\theta)\, sin(\theta - \theta_0)$.
    On a donc $lim_{\theta \to \theta_0} X(\theta) = \infty$.
    - Si $lim_{\theta \to \theta_0} Y(\theta) = \infty$, branche parabolique de direction $\overrightarrow{u}(\theta_0)$.
    - Si $lim_{\theta \to \theta_0} Y(\theta) = l$, asymptote $Y = l$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$.
  - Si on a $lim_{\theta \to \infty} r(\theta) = r_0$, la courbe est asymptote au cercle $\mathcal{C}(O, r_0)$.

Si on veut les positions relatives aux asymptotes, on peux utiliser un DL au point fini ou infini considéré, à l'ordre suffisant.

1.7 Intersections avec les axes

Trouver les points qui coupent les axes.

1.8 Points multiples

Trouver t et t' tel que $M(t) = M(t')$.
Calcul difficile en général, système non linéaire de deux équations...

1.9 Tracé

Attention si le repère est tournant !
- Placer les points connus ainsi que les demi-tangentes.
- Tracer les asymptotes.
- Tracer sur l'ensemble d'étude.
- Compléter par invariances si besoin.

2 Équation de la tangente

C'est en fait un DL d'ordre 1.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3 Continuité, Dérivabilité

$$\textit{dérivable} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

$$\textit{continue} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\textit{dérivable} \Rightarrow \textit{continue}$$