Coniques

M. CHATEAU David

17/07/2009

Résumé

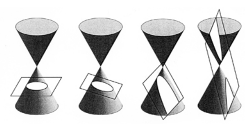
Rappels mathématiques sur les coniques

Table des matières

1 Coniques

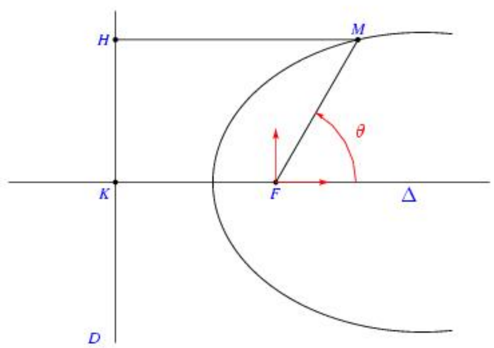
1.1 Définition

On peut définir les coniques comme l'intersection d'un plan avec un cône de révolution. (cercle, ellipse, parabole, hyperbole)



La définition mathématique est : Une *conique* de *foyer* F, de *directrice* D, d'*excentricité* e est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\frac{MF}{d(M,D)} = e$$



Le *paramètre* p de la conique est $p = eq$ où $D : x = -q$.

1.2 Équation polaire

Si la directrice est à gauche.

$$r = \frac{p}{1 - e\,cos(\theta)}$$

1.3 Équation cartésienne

L'origine du repère est le foyer.

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2$$

1.3.1 Réduction de l'équation cartésienne

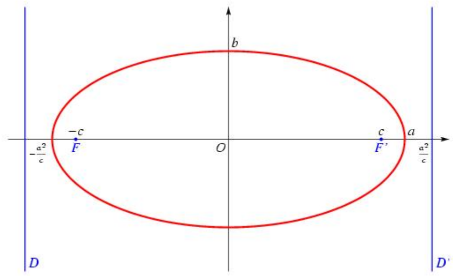
1.3.2 A partir de $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$:

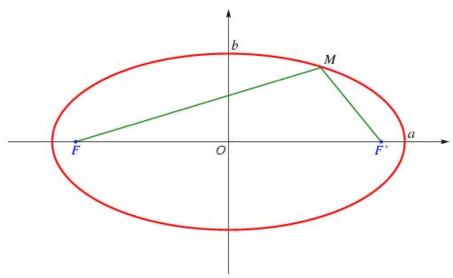
- On supprime les termes en xy par une rotation en posant $\begin{cases} x = X\,cos(\theta) - Y\,sin(\theta) \\ y = X\,sin(\theta) + Y\,cos(\theta) \end{cases}$,
  on arrive à $AX^2 + BXY + CY^2 = 1$, on choisit θ tel que $B = 0$, d'où $AX^2 + CY^2 = 1$.
  On discute selon les signes de A et C.
- On peut aussi calculer $\Delta = b^2 - 4ac$ invariant par changement de repère et choisir $b = 0$ d'où :
  - $\Delta < 0$, c'est soit rien, soit une ellipse (ou un cercle).
  - $\Delta = 0$, c'est soit rien, soit deux droites parallèles.
  - $\Delta > 0$,c'est une hyperbole.

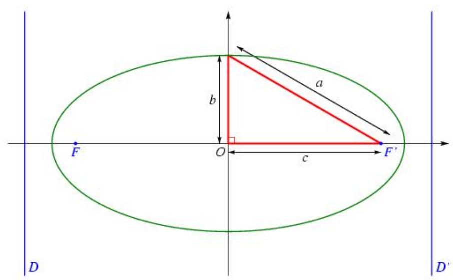
1.3.3 A partir de $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$:

- On utilise la méthode précédente pour avoir $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$
  - Puis, Si $AC \neq 0$, on supprime les termes en X et Y par translation en posant $\begin{cases} X' = X + \frac{D}{2A} \\ Y' = Y + \frac{E}{2C} \end{cases}$
    On arrive à $AX'^2 + CY'^2 = F$
    - Si $F \neq 0$, c'est comme avant.
    - Si $F = 0$, on a affaire à deux droites ou un singleton ou l'ensemble vide.
  - Sinon, $AC = 0$.
    - Si $A = 0$, on a $CY'^2 + DX = F$
      - Si $D \neq 0$, on effectue la translation $X' = X - \frac{F}{D}$ et on a $CY'^2 + DX' = 0$. C'est une parabole d'axe (OX').
      - Si $D = 0$, on a affaire à deux droites parallèles ou à l'ensemble vide.
    - Si $C = 0$, on a $AX'^2 + EY = F$
      - Si $E \neq 0$, on effectue la translation $Y' = Y - \frac{F}{E}$ et on a $AX'^2 + EY' = 0$. C'est une parabole d'axe (OY').
      - Si $E = 0$, on a affaire à deux droites parallèles ou à l'ensemble vide.

2 Ellipse







$$e < 1 \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

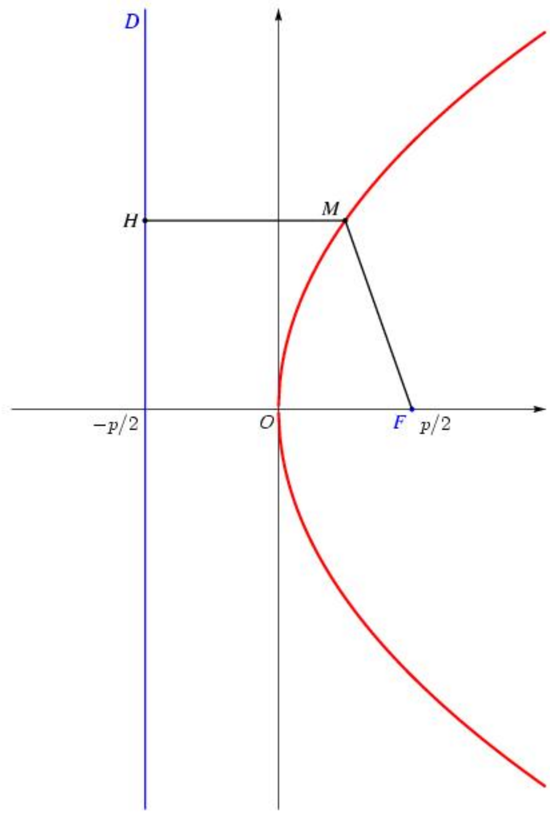
$$e = \frac{c}{a} \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\begin{cases} X(t) = a\,cos(t) \\ Y(t) = b\,sin(t) \end{cases} \qquad MF + MF' = 2a \qquad T : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On a $O(\frac{ep}{1-e^2}, 0)$, $a = \frac{p}{1-e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$, $F(\pm c, 0)$, $D : x = \pm\frac{a^2}{c}$

OF est appelé *demi-distance focale*, a *demi-grand axe*, b *demi-petit axe.*

3 Parabole

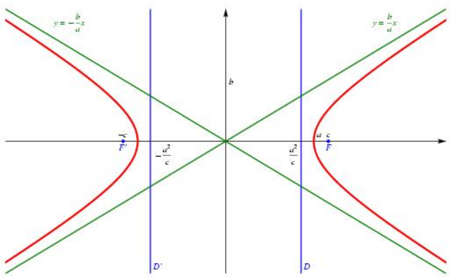


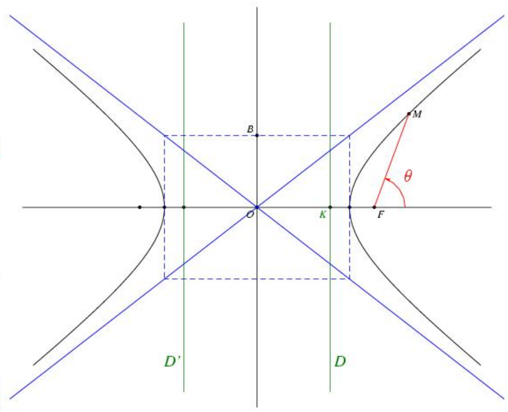
$$e = 1 \qquad Y^2 = 2pX$$

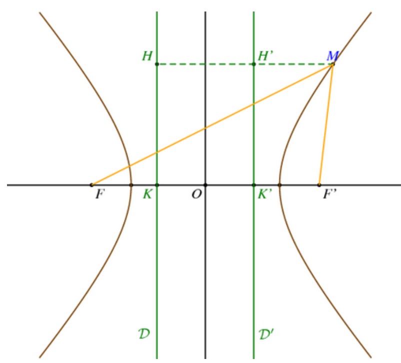
$$\begin{cases} X(t) = \frac{t^2}{2p} \\ Y(t) = t \end{cases} \qquad F(\frac{p}{2}, 0) \qquad T : yy_0 = p(x + x_0)$$

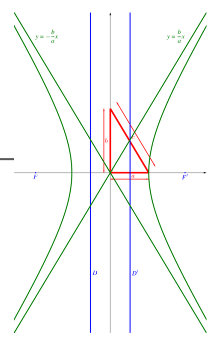
L'origine du repère est $S(-\frac{p}{2}, 0)$, aussi appelé *sommet* de la parabole.

4 Hyperbole









$$e > 1 \qquad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

$$\begin{cases} X(t) = a\,ch(t) \\ Y(t) = b\,sh(t) \end{cases} \qquad |MF - MF'| = 2a \qquad T : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On a $O(-\frac{ep}{e^2-1}, 0)$, $a = \frac{p}{e^2-1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$, $F(\pm c, 0)$, $D : x = \pm\frac{a^2}{c}$, $T_\infty : y = \pm\frac{b}{a}x$

Le cercle de centre O et de rayon a est appelé *cercle principal.*

Le cercle de centre O et de rayon b est appelé *cercle secondaire.*

Le cercle de centre O et de rayon c est appelé *cercle focal.*