Signaux physiques
Chap I-00 : Incertitudes et sécurité

Version étudiants - 5 mars 2016

1 Incertitudes de mesure

1·1 Premières définitions

- L'acte de mesurer est appelé un *mesurage*, et la grandeur recherchée est appelée *mesurande*. La valeur mesurée m est différente de la *valeur vraie* notée M_v. On définit donc l'erreur :

$$E = |m - M_v|$$

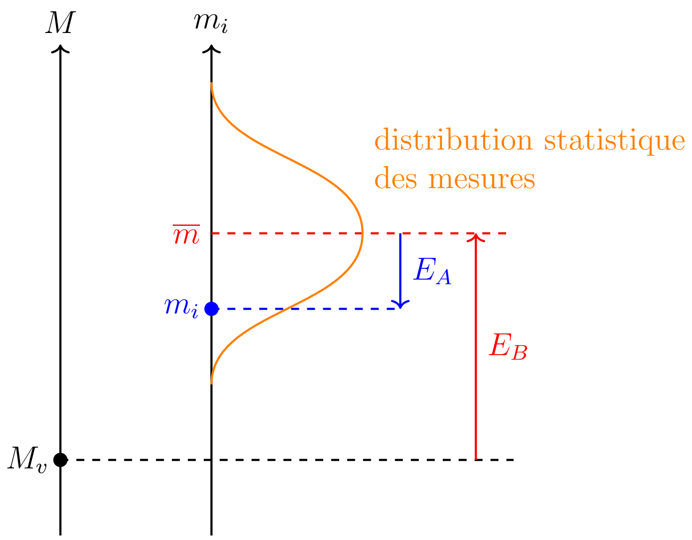
- Il est important de savoir d'où vient cette erreur, et comment il convient d'évaluer l'incertitude qui en découle. Sans cette indication, un résultat expérimental n'a aucune valeur.

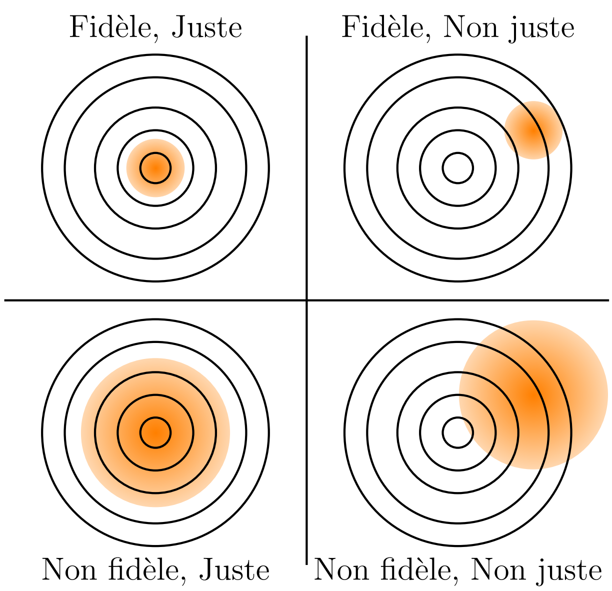
> Une mesure est toujours donnée **avec son incertitude** et son unité.
> On note $M = m \pm \Delta M$, où l'incertitude ΔM est associée à un **niveau de confiance**.

Ce chapitre se propose d'expliquer plus en détail les notions et savoir-faire évoqués dans cet encadré.

✘ *Attention :* Il y a une différence subtile entre erreur et incertitude.

- De façon générale, l'erreur a deux origines possibles, liées au processus de mesure :
  - Une *erreur aléatoire* E_A, qui change à chaque mesure (dispersion, notion de fidélité).
  - Une *erreur systématique* E_B, qui est identique pour chaque mesure (décalage, notion de justesse).





Remarque : Tout paramètre ayant un effet sur l'erreur est appelée *grandeur d'influence*.

1·2 Évaluation d'une incertitude

1·2·*1* Incertitude de type A (aléatoire, statistique)

- Dans le cas d'une mesure répété n fois, on utilise les estimateurs mathématiques suivants :

$$\text{moyenne :} \quad m = \overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\text{écart} - \text{type :} \quad \sigma_{exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{m})^2}$$

✘ *Attention :* Sous la racine, c'est $(n-1)$ et non n car on utilise l'estimateur de la moyenne.

- **L'incertitude-type A** est alors définie par la formule suivante, où t est le coefficient de Student dont la valeur dépend du nombre n de mesures.

$$\sigma_A = t\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma_{exp}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1,00

✘ *Attention :* Ne pas confondre écart-type et incertitude-type.

1·2·*2* Incertitude de type B (systématique, instrumentale)

- Dans ce cas, les méthodes sont diverses et font appel au bon sens scientifique. On notera que dans une situation réelle, il existe de nombreuses sources d'incertitude. Il convient donc de les identifier, d'en négliger certaines si besoin, et d'évaluer les plus importantes pour en tenir compte. Les coefficients qui apparaissent ci-dessous dans les formules proviennent des propriétés de la distribution de probabilité supposée lors de la mesure (voir en TP, logiciel GUM ou Régressi). Quelques exemples :

  — Si l'incertitude type est donnée dans la notice de l'appareil, il suffit de lire.

  — Si c'est un instrument à graduations, deux cas sont possibles :

    — Le constructeur indique la demi-largeur de la distribution de probabilité Δ_c. Dans ce cas, il suffit de diviser par racine de 3 (explication plus bas).

    — Sinon, on peut supposer que la probabilité de mesure est constante entre les deux graduations considérée (distribution rectangulaire, ce que fait le constructeur). L'incertitude-type est alors donnée par la formule ci-dessous.

  — En dernier recours, on utilise une évaluation expérimentale (exemple : temps de réaction).

  Numérique : http://www.humanbenchmark.com

$$\sigma_B = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}} \quad \text{ou} \quad \sigma_B = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}}$$

- D'où vient ce coefficient $\sqrt{3}$? Considérons une distribution de probabilité rectangulaire de largeur a correspondant à une demi-graduation et calculons son écart-type :
$\sigma^2 = \int_{0-\overline{x}}^{a+\overline{x}} \frac{(x-\overline{x})^2}{a}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{y^2}{a}\mathrm{d}y = \frac{a^2}{3}$. *CQFD.*

Numérique : Pour d'autres distribution de probabilité, le coefficient est donné par le logiciel GUM : http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html ... ou par un calcul, comme on vient de le voir.

- Enfin, souvent (verrerie, multimètres, résistances...) le constructeur indique l'incertitude maximale Δ_c sous la forme d'un pourcentage de la valeur globale lue, auquel il faut ajouter une incertitude sur le dernier digit. L'une, l'autre ou aucune de ces deux incertitude peut être négligeable selon la mesure considérée.

Remarque : La résolution correspond elle au plus petit écart mesurable avec l'appareil.

❒ Exemple : Voltmètre

On mesure avec un voltmètre une tension de 24,0V à l'aide d'un voltmètre de classe 2. Avec le calibre utilisé, la notice nous indique que l'incertitude est de 2% + 3 digits.

On a alors $\sigma = \frac{0{,}02 * 24{,}0 + 0{,}3}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}48 + 0{,}3}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}78}{\sqrt{3}} = 0{,}5$ V. (Les deux parties sont comparables.)

L'incertitude-type absolue est de 0,5 V, et l'incertitude-type relative est de $\frac{.5}{24} = 2\%$.

1·2·3 Incertitudes composées

- Si l'on cherche la valeur de $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, **si les variables x_i sont indépendantes**, on peut calculer facilement l'incertitude-type de y par la formule suivante :

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2}$$

Cas d'une somme : si $y = x_1 + x_2$, alors

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$$

Cas d'un produit : si $y = x_1 x_2$ alors

$$\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2}\right)^2$$

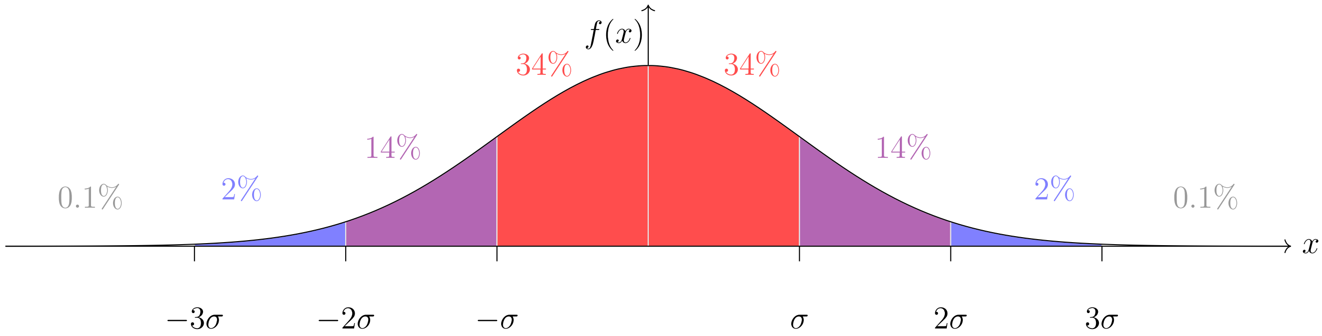
Dans le cas contraire, il est plus simple d'utiliser un logiciel.

Remarque : Dans le cas d'une moyenne arithmétique d'une même mesure répétée, on obtient que $\sigma_y = \frac{\sigma_{x_i}}{\sqrt{n}}$. L'incertitude évolue donc comme $1/\sqrt{n}$ avec le nombre de mesures, et on a $y = \overline{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$. Il est donc plus intéressant d'effectuer 1 mesure de 10 périodes, plutôt de 10 mesures d'une période.

1·2·4 Niveau de confiance

- En supposant que la distribution de nos mesures est gaussienne, on peut affecter un niveau de confiance (probabilité de ne pas se tromper) en fonction de l'incertitude-type. On parle alors *d'incertitude élargie.*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$



Pour $\Delta M = \sigma$, le niveau de confiance en la mesure est de 68%.
Pour $\Delta M = 2\sigma$, le niveau de confiance en la mesure est de 95%.
Pour $\Delta M = 3\sigma$, le niveau de confiance en la mesure est de 99%.

- *Remarque :* σ représente à un facteur près la largeur de la gaussienne à mi-hauteur.
- *Remarque :* Le boson de Higgs a été détecté avec une confiance à 7 σ !
- *Remarque :* La notation $u(x)$ tend à remplacer $\sigma(x)$ pour l'incertitude-type.

1·2·5 Majoration absolue

- On peut effectuer une majoration absolue de l'erreur très rapidement en écrivant la différentielle : $\mathrm{d}f(x_i) = \sum_i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i$, puis en majorant les variations : $\alpha \mathrm{d}x \to |\alpha|\Delta x$. On obtient ainsi ce qui correspond à Δ_c. Attention, chaque $\mathrm{d}x_i$ ne doit apparaître qu'une seule fois avant la majoration. Savoir différencier sera également utile pour trouver des minima de fonction à plusieurs variables.

Cas d'une somme : si $y = x_1 + x_2$, alors

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Cas d'un produit : si $y = x_1 x_2$ alors

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

1·3 Chiffres significatifs

- On rappelle qu'un résultat s'écrit sous forme scientifique, et que le nombre de chiffres significatifs du résultat est limité par le nombre de chiffres significatifs de la donnée la moins précise. Il en va de même pour la précision. Enfin, il existe des handbooks pour vérifier si la mesure est compatible avec les valeurs tabulées.

1·4 Régression linéaire

- On effectue le plus souvent un "fit" linéaire des données sur un modèle de type $y = ax + b$. Le logiciel renvoie une valeur appelée coefficient de corrélation linéaire et notée r, défini comme

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Cette valeur est proche de $+1$ ou -1 si les points sont alignés.

- On remarque alors que les incertitudes n'interviennent pas dans son calcul. Ainsi, on comprend aisément que sa valeur ne dépendra pas de la taille des barres d'erreurs, et que ce n'est donc pas un bon indicateur pour valider ou invalider la loi.
- On utilisera plutôt le χ^2 défini par

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - (ax_i + b))^2}{\sigma_i^{exp2}}$$

et ensuite le χ^2 réduit

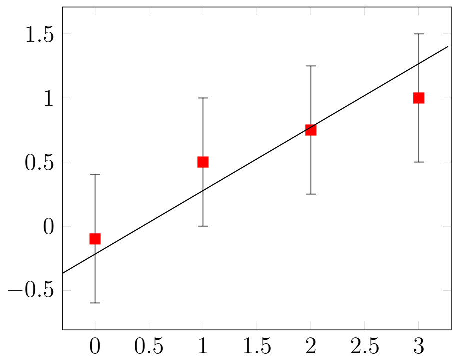
$$\chi^2_{réduit} = \frac{\chi^2}{n-2}$$

où $n - 2$ est le nombre de degrés de liberté du problème, égal au nombre de variables n moins le nombre p de paramètres estimés (ici a et b). Cette quantité représente le ratio de l'erreur statistique (qui diminue avec le nombre de mesures) sur l'erreur expérimentale.

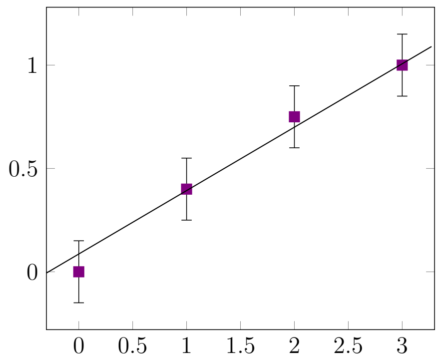
$$\boxed{\chi^2_{réduit} = \left(\frac{\sigma_y^{stat}}{\sigma_y^{exp}}\right)^2}$$

- Différents cas peuvent alors se présenter :

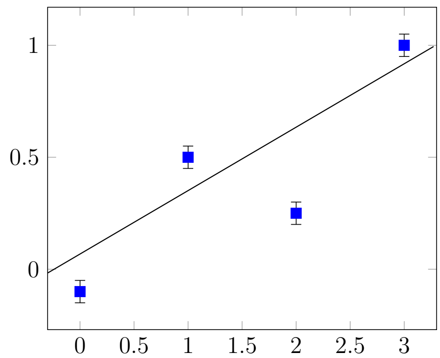
— $\chi^2_{réduit} \ll 1$ **:** La loi est compatible mais les incertitudes sont surestimées.
— $\chi^2_{réduit} \simeq 1$ **:** Les données sont compatibles avec le modèle.
— $\chi^2_{réduit} \gg 1$ **:** La loi n'est pas validée ou les incertitudes sont sous-estimées.



$\chi^2_{réduit} \ll 1$



$\chi^2_{réduit} \simeq 1$

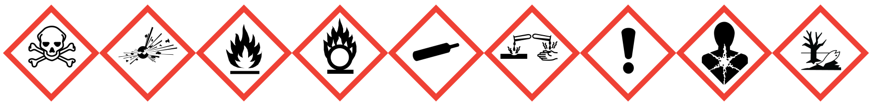


$\chi^2_{réduit} \gg 1$

Remarque : Si l'on n'indique pas d'incertitude expérimentale, le χ^2 fourni par le logiciel n'a pas le même sens et ne permet pas de se prononcer sur la validité de la loi.

2 Règles élémentaires de sécurité

Chimie :
Blouse en coton, lunettes, gants, chaussures fermées et cheveux longs attachés. Ni boisson ni nourriture. Déplacements limités et mouvements lents. Pas de gants près d'une source de chaleur. Pictogrammes de sécurité, mentions de danger (phrases H) et conseils de prudence (phrases P). Enfin, prendre en compte le recyclage des produits en fin de TP et l'impact sur l'environnement (récupération séparée des bases, acides, halogènes et métaux, à ne pas jeter à l'évier !).



Numérique : http://www.inrs.fr et http://www.msds-europe.com/id-225-phrases_h_p_clp.html

Électricité :
24 volts maximum. Quelques milliampères suffisent à faire s'arrêter le cœur. Seuls les appareils de mesures sont branchés sur le secteur.

Optique :
Les lasers sont dirigés vers les murs, manipulés sans objets réfléchissants, arrêtés ou stoppés avec un cache. En aucun cas le faisceau ne doit être dirigé vers une personne. De même, on ne place jamais ses yeux au niveau du laser.

Thermodynamique :
Attention à ce qui est très chaud ou très froid. Les bouteilles de gaz doivent être attachées à l'extérieur.

Signature :

- ➜ APP Expliquer quels sont les différents type d'erreurs.
- ➜ APP Expliquer pourquoi le coefficient de corrélation n'est pas pertinent pour valider un modèle.
- ➜ ANA Savoir identifier les sources d'erreur de mesure.
- ➜ REA Procéder à l'évaluation des incertitudes type A et B.
- ➜ REA Associer un niveau de confiance de 95% à une incertitude élargie.
- ➜ VAL Comparer une mesure aux valeurs attendues.
- ➜ VAL Tester une loi par régression linéaire à l'aide d'un logiciel.
- ➜ COM Utiliser le vocabulaire de la métrologie.
- ➜ COM Présenter un résultat de mesure sous forme standard.